**Mathematical Methods in Earth Sciences**

강의 10 – 2017년 5월 21일

다중적분(multiple integrals)

단일 적분의 결과를 면적으로 해석할 수 있듯이, 이중 적분의 결과를 부피로 해석할 수 있다. 하지만 단일 적분은 면적을 구하는 것 이외에도 다른 용도로도 많이 사용된다. 그와 마찬가지로 이중 적분 또한 부피 구하는 것 이외의 다른 용도로도 사용이 가능하다.

예를 들어, 직사각형판의 밀도(단위 면적 당 질량)가 로 주어졌을 때, 로 이루어진 영역에서 질랑을 구한다고 가정하자. 이 경우는 먼저 사각형의 미소면적 의 질량은 로 근사적으로 구할 수 있다. 다음으로 “모든” 미소면적 의 질량을 합하면 직사각형판의 전체질량이 나오며, 이는 미소질량 의 이중적분으로 구할 수 있다. 즉,

(참고: 적분구간이 상수이고, 일 때(즉, 함수의 곱), 위와 같이 분리하여 적분이 가능하다.)

**극좌표계(Polar coordinates)에서의 이중적분**

다음과 같은 영역 에 대해 이중적분을 취한다고 하자. 이런 경우 을 직각 좌표계 대신 극좌표계로 표현할 때 더 쉽게 적분값을 얻을 때가 많이 있다.



직각좌표계와 극좌표계와의 관계는 다음과 같음을 기억하자.

그리고 극좌표계에서의 이중적분은 아래 그림과 같이 미소영역을 로 표현하므로,

 

와 같이 나타낸다. 이중적분을 직각좌표계에서와 같이 이 아닌 로 이 더 추가되었음을 기억하자.

(예제) (위 그림 (b)에 해당)

위에서는 2차원 영역에서의 적분을 다루었고, 이제부터는 3차원 영역에서의 적분, 즉, 삼중적분을 다룬다. 일반적인 삼중적분의 표기법은 다음과 같다.

만약 다음과 같은 3차원 공간 를 적분한다고 하자.

그렇다면

로 표현이 가능하다. 이 경우 이중적분 때와 마찬가지로, 에 대해 먼저 적분하고, ,에 대한 순서대로 적분한다. 가능한 적분 순서로는 6개가 존재하지만, 어떠한 순서를 하든지 결과는 동일하며, 순서는 함수의 형태 및 각자 답을 얻기 쉬운 순서대로 택하면 된다.

(예제) 다음의 삼중적분을 구하라.

삼중적분에 대한 결과는 3차원 영역에 대한 부피로도 해석이 가능하다. 즉, 3차원 영역 에 의한 부피는

로 표현한다.

(예제) 어떠한 고체의 밀도(단위 부피당 질량)이 일 때, 이 물체의 전체 질량을 구하라. 단, 고체의 형태는 와 같다. (힌트: 미소질량 , 답: 전체질량은 2 이다.)

**구면좌표계(spherical coordinate)에서의 부피**



(예제)

(예제) 밀도가 로 균일하며, 반경이 인 별의 질량을 구하시오. (힌트: , 답: )

(예제) 별 표면에서 방출하는 특정 파장에서의 복사에너지양은?

